

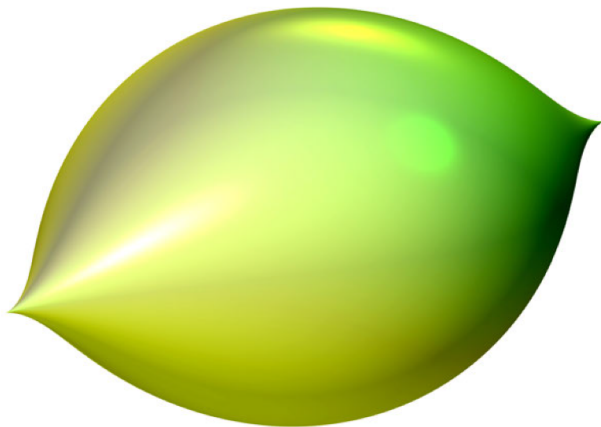
Superfícies i singularitats

Guillem Blanco

Les formes de les matemàtiques

29 de setembre de 2018

Un primer exemple: la llimona



Zitrus $x^2 + z^2 = y^3(1-y)^3$

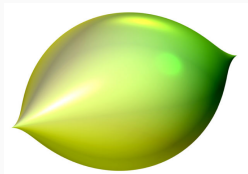
Que és una superfície?

Solucions d'un polinomi amb tres variables

Que és una superfície?

Solucions d'un polinomi amb tres variables

$$x^2 + z^2 - y^3(1 - y)^3 = 0$$



Com classifiquem les superfícies?

El **grau** de la superfície (1, 2, 3, ...)

Com classifiquem les superfícies?

El **grau** de la superfície (1, 2, 3, ...)

+

Les seves **singularitats**.

Com classifiquem les superfícies?

El **grau** de la superfície (1, 2, 3, ...)

+

Les seves **singularitats**.



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$x^2 + y \cdot z = 0$$



$$x^3 + y^2 = z^2$$



$$x^3 + y^2 \cdot z + x \cdot z^2 = x \cdot z$$

Com més alt és el **grau**



Més complicada és la forma

Pot tenir més singularitats



$$x^2 + y^2 = z^2$$



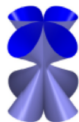
$$x^3 + y^2 = z^2$$



$$x^3 + y^2z + xz^2 = xz$$

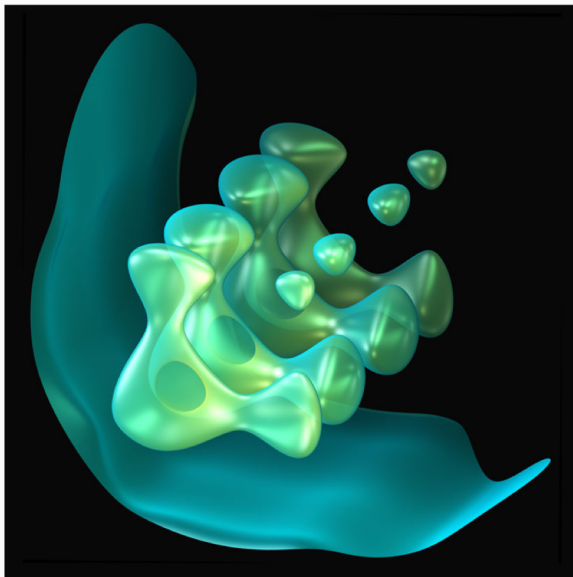


$$x^2yz + x^2z^2 = y^3z + y^3$$



$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2(z^2 + 1)$$

Exemple: El buda



Buddha by Mehrdad Garousi

Example: El girasol



Sunflower by Hartkopf and Matt

Com detectem les singularitats?

Un punt (a, b, c) està a la superfície si

$$f(a, b, c) = 0$$

Com detectem les singularitats?

Un punt (a, b, c) està a la superfície si

$$f(a, b, c) = 0$$

El punt (a, b, c) serà singular si anul·la
totes les derivades de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 0$$

Les singularitats de la llimona

L'equació de la llimona:

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^3(1 - y)^3$$

Les singularitats de la llimona

L'equació de la llimona:

$$f(x, y, z) = x^2 + z^2 - y^3(1 - y)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = 2a = 0 \longrightarrow a = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = 3b^2(1 - b)^2(2b - 1) = 0 \rightarrow b = 0, 1, 0.5$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = 2c = 0 \longrightarrow c = 0$$

Les singularitats de la llimona (II)

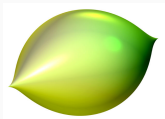
Tenim tres possibles punts singulars:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0.5, 0)$$

Només dos son punts de la llimona:

$$\boxed{f(0, 0, 0) = 0}, \boxed{f(0, 1, 0) = 0}$$

$$f(0, 0.5, 0) = 0.0156\dots$$



Rècords mundials

Quantes singularitats pot tenir una superfície?

d	1	2	3	4	5	6	7	8	d
$\mu(d) \geq$	0	1	4	16	31	65	99	168	$\approx \frac{5}{12}d^3$
$\mu(d) \leq$	0	1	4	16	31	65	104	174	$\approx \frac{4}{9}d^3$

$d = 1, 2, 3, 4, 5, 6$: conegut

$d \geq 7$: desconegut

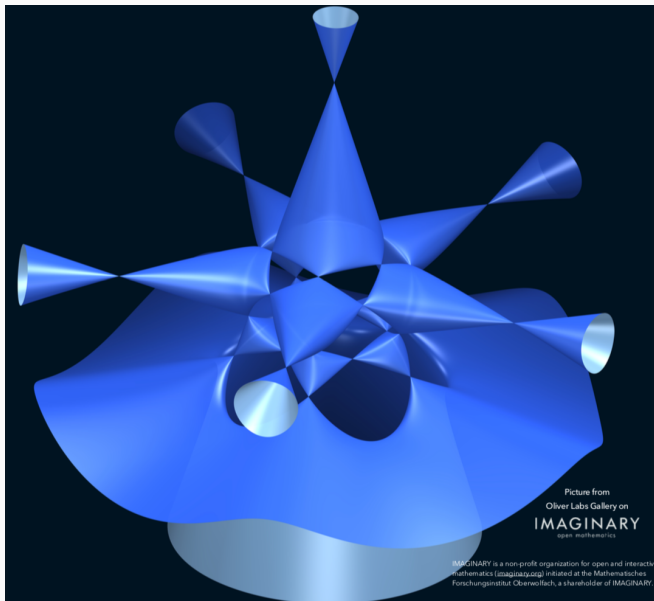
$d = 7$: el **rècord mundial** són **99** singularitats

$d = 8$: el **rècord mundial** són **168** singularitats

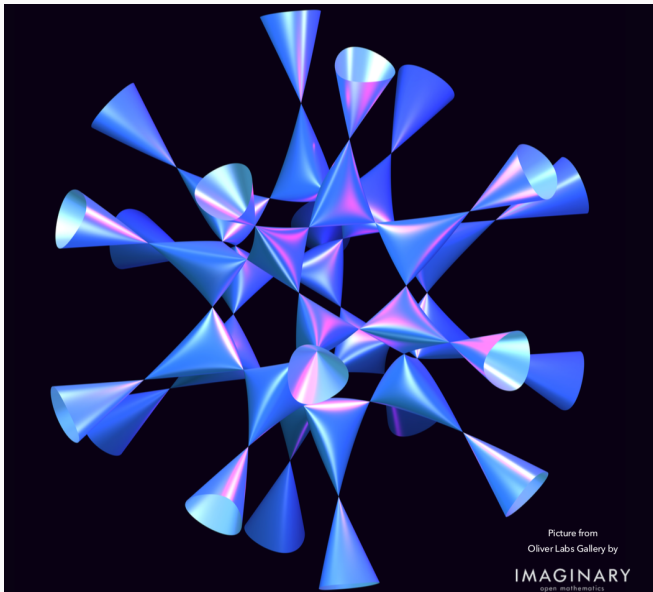
Quàrtica de Krummer



Quíntica de Togliatti



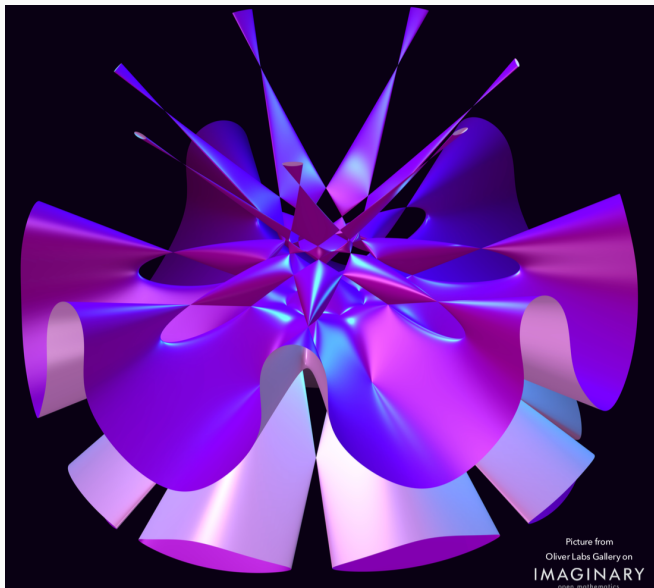
Sèxtica de Barth



Picture from
Oliver Labs Gallery by

IMAGINARY
open mathematics

Sèptica de Labs



GRÀCIES!